剛性マトリクスの固有値操作の提案　その2：例証

準会員　○江島　ありさ*
正会員　　堀　昭夫**

剛性マトリクス　固有値　操作　弾塑性　不安定釣合経路

１．序　前報（その 1）に続いて解析結果を述べる。

２．単純な弾塑性柱モデルでの解析結果　固有値操作をFig. 1 のモデルに対する解析に適用して，その効果を調べる。同モデルは，剛体棒の脚部に 4 つのバイリニアばねを持つ片持柱立体モデルで，圧縮降伏軸力（6N）に達した瞬間に，塑性座屈軸力（強軸弱軸がなく 2 方向とも 4.8N）を超過するモデルとなっている。もし固有値操作をしない場合には，整合剛性下で不安定釣合経路をたどる可能性があるモデルである。なおモデルは特定の柱材を想定したものではなく，形状変化をあまり大きくしないように降伏変位を小さめに設定している。

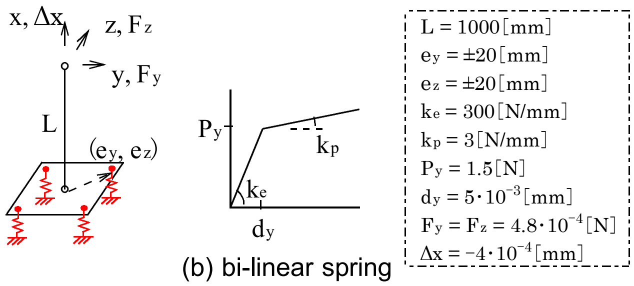
このモデルに対し，軸方向（−x 方向）に変位制御して 100 ステップの解析を行った。なお変位制御増分は圧縮降伏変位の 1/12.5 とした。頂部の水平 2 方向（+y,+z 方向）には，それぞれ $4.8\cdot10^{-4}$N の荷重不整を与えた。この不整は，塑性剛性下では y,z 方向とも頂部変位 0.1mm の増加に対応し，弾性剛性下では y,z 方向ともばね降伏力の± 0.4%だけばね力を増減させる曲げに対応する。

解析結果を Fig. 2 に示す。まず圧縮力―圧縮変位関係（fig.(a)）は図中 A 点で降伏するバイリニアとなっている。次に，ばね降伏後（A 点以降）は横変位の増加が見られ（fig.(b)），塑性座屈した事がわかる。ところが fig.(c) の横変位方向（座屈方向）を見ると，初期には 45° 方向（+y,+z 方向）であったものが，途中の B 点で 90° 方向（+z 方向）に変化している。剛性マトリクス固有値の操作前の値を fig.(d) に示す。但し fig.(d) の菱形内の e および p は，各ばねが弾性（除荷）剛性か塑性剛性かを示し，Fig. 1 (a)の 4 つのばね位置と対応するように描いてある。推移を以下にまとめる。

i) 初期には固有値が 2 つとも正であるが，ii) 4 つのばねが降伏すると 2 つの固有値とも負になって固有値操作の対象となり，その結果，循環剛性選択過程を経ずに，慣用の試行修正過程[1]により図中左下（−y,−z 方向）のばねが除荷された（A 点）。なおこの 2 つの負固有値は，少なくとも有効数字 7 桁が一致して多重固有値に近かった。

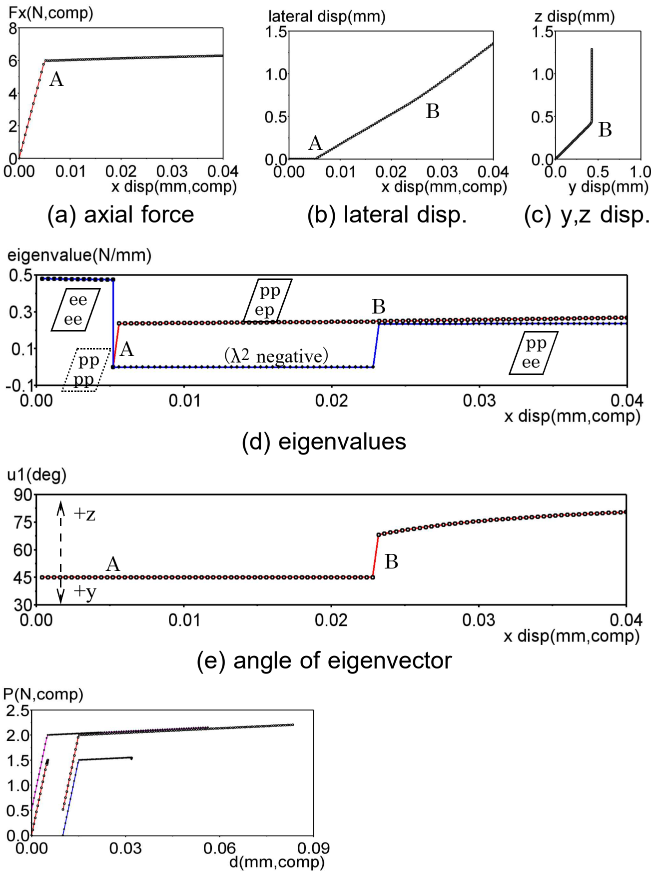
iii) その降伏状態がしばらく続いたが（A−B 間），その間の固有値は 1 つだけ負であり，固有値操作によってその固有ベクトル方向の不釣合力が拡大を続けて，44 ステップ後に右下のばね（+y,−z 方向）も除荷された（B 点）。但し $2^{44} \fallingdotseq 10^{13.2}$ を考えると，倍精度の数値計算誤差が発端となって初期不整のない方向に座屈方向が変化したと推察できよう。iv) 2 つのばねが除荷された後は，2 つの固有値とも正になっている。

固有ベクトルの方向を fig.(e) に示す。固有ベクトルの方向は 45° 方向（荷重不整と同方向）が続いたが，2 つめの除荷発生（B 点）以後は方向が変化している。なお A



(a) model　(b) bi-linear spring　(c) in analysis

Fig. 1 Spring column model



(a) axial force　(b) lateral disp.　(c) y,z disp.

(d) eigenvalues

(e) angle of eigenvector

(f) each spring

Fig. 2 Results of spring column model

Manipulation of Eigenvalues of a Stiffness Matrix,　Part 2: Examples

EJIMA Arisa, HORI Akio

点では負固有値が多重に近いが，fig.(e)を見る限り，A 点の前後で固有ベクトルの方向は変化していない。

fig.(f)に各ばねの力と変位の関係を重ね書きして示す。なお Fig. 1(a)の各ばね位置に合わせて，それぞれ初期位置をずらして描いた。座屈発生後も左下のばねはほとんど塑性変形していない(初期位置が原点の曲線)。

３．固有値操作をしない場合の解析結果

Fig. 2 の解析に対し，もしも固有値操作をしない場合の結果を Fig. 3 に示す。最初に，図は省略するが，圧縮力—圧縮変位関係は Fig. 2(a)と全く同様であった。但し，座屈後の横変位は 45° 方向の負値(-y,-z 方向)に限定されていて，固有ベクトル方向も 45° 方向から変化しなかった。fig.(a)に 45° 方向変位を示すが，ばね降伏後(A 点以降)の横変位は荷重不整と逆向きで，かつ C 点以降は座屈変位が減少をしている。fig.(b)に圧縮力− 45° 方向変位の関係を示すが，C 点以降では圧縮力が増加しつつ座屈変位が減少するという，森迫ら[1)]が詳述した不安定釣合経路に陥ったと判断される。fig.(c)に剛性マトリクスの固有値を示す。推移は以下のようであった。

i) 4 つのばねが降伏した直後に循環剛性選択過程に陥った。1 つの剛性仮定は，4 つのばねとも塑性継続(固有値が 2 つとも負)，もう 1 つの剛性仮定は，右上のばねだけが除荷発生(固有値の 1 つが負)，となっていた(A 点)。このため本例では，後者の剛性仮定を採用して解析を続行した(なお前者の仮定を採用すると解析結果が発散的になった)。

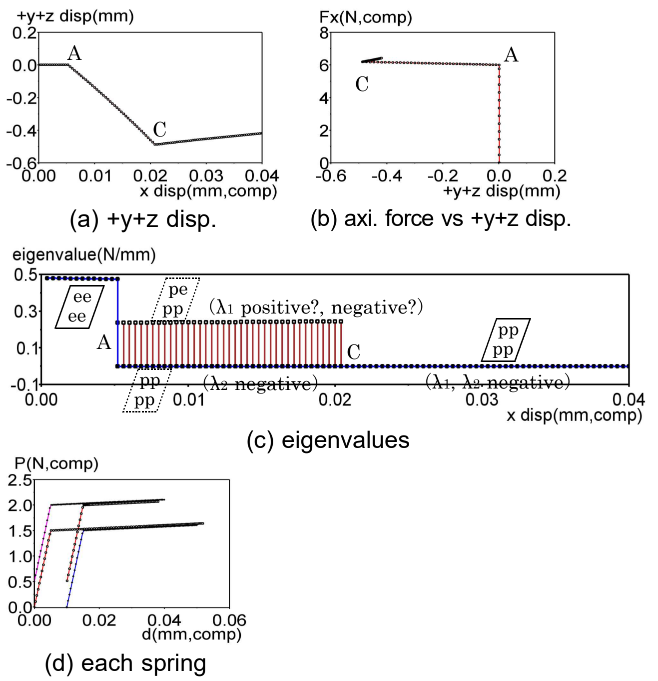
ii) この循環剛性選択過程が C 点まで続いたが，C 点以後は 4 つのばねが塑性継続で 2 つの固有値が負のままで，剛性仮定と変形増分の方向が整合する釣合経路をたどっている。しかしこれは，固有値の符号から考えて，2 方向に不安定な釣合経路である。

fig.(e)に各ばねの力と変位の関係を重ね書きして示す。4 つのばねが塑性を継続しているが，fig. 2(f)とは異なり，左下のばねの塑性変形が最も大きい。

以上のように，固有値操作をしない本節の解析結果では，①本来とは逆方向に座屈した後に，② 2 方向に不安定な釣合経路をたどる，という結果に陥った。

４．降伏力を10倍または75倍にした場合の解析結果　概略のみを記す。Fig. 2 の解析に対し，ばねの降伏力・降伏変位および変位制御増分 Δx をいずれも 10 倍にした解析の結果を Fig.4(a),(b)に，75 倍にした解析の結果を Fig.4(c),(d)に示す。圧縮力—圧縮変位関係(fig.(a),(c))では，座屈後の耐力低下が見られる。75 倍の解析では，変位制御した方向に(不整 0 の)釣合解がないため，数ステップをかけて不釣合力が成長した後に荷重低下して(F–G 間)，不整 0 の釣合曲線に近づいた事が判明している。また除荷載荷仮定が異なる複数の不整 0 の釣合曲線が密集した領域を数ステップ過ぎた後に，再度荷重低下した(H–I 間)事も判明した。固有値は両ケースとも，最初の降伏(A 点)から数ステップの間は，2 つの固有値が負のままで推移している(fig.(b),(d))。

５．まとめ　解析例を通じて固有値操作の有効性を例証した。**参考文献**：その 1 にまとめて示した。

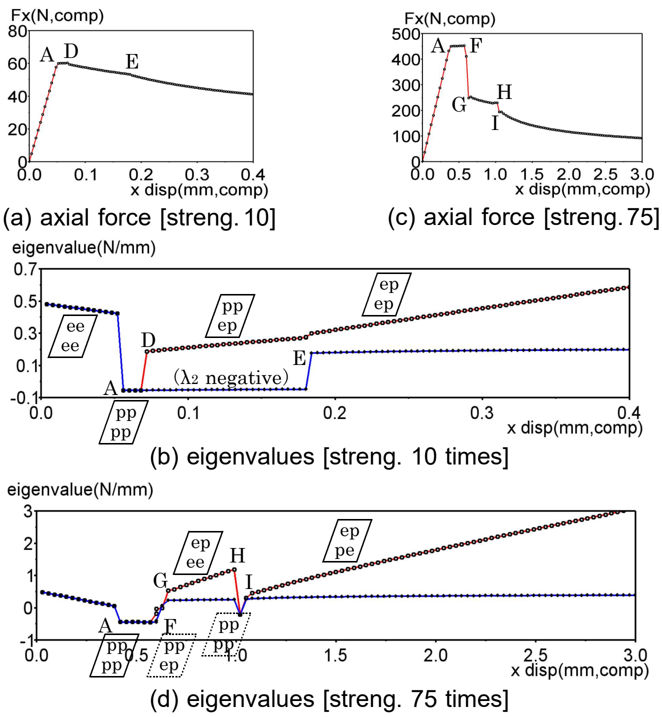


(a) +y+z disp.　(b) axi. force vs +y+z disp.

(c) eigenvalues

(d) each spring

Fig. 3 Results without eigenvalue manipulation



(a) axial force [streng. 10]　(c) axial force [streng. 75]

(b) eigenvalues [streng. 10 times]

(d) eigenvalues [streng. 75 times]

Fig. 4 Results using strengthened springs

*　小山工業高等専門学校　専攻科生

**小山工業高等専門学校　教授・博(工)

*　Grad. Student, Oyama College, National Inst. of Tech.

** Prof., Oyama College, National Inst. of Tech. Dr. Eng.