20144

日本建築学会大会学術講演梗概集
（東海） 2021 年 9 月

剛性マトリクスの固有値操作の提案　その1：固有値操作

正会員　○堀　昭夫*
準会員　　江島　ありさ**

剛性マトリクス　固有値　操作　弾塑性　不安定釣合経路

1．序　不安定性を含む弾塑性解析のための妥当な方法の 1 つとして，剛性マトリクスの固有値を操作する方法を提案する。その 1 では固有値操作を提案する。

2．非常に単純なモデルの不安定釣合経路　まず非常に単純なモデルとして，Fig. 1(a)に示す両端ピンの倒立棒を考える。図中の P_1，P_2 は外力，d_1，d_2 は変位，L は材長，EA は断面軸剛性とし，塑性化や慣性力は考えない。倒立棒なので $P_2 = 0$ とし，初期状態で $d_2 = 0$ とすると，当然ではあるが，倒立棒は P_1 が正なら安定，$P_1 = 0$ で分岐経路を持ち，P_1 が負なら不安定である。いま，倒立棒の釣合を Fig. 1(b)の局所座標系で考えてみる。図中に示すように局所座標系方向を添字 x,y で，前ステップ終了時の値を添字 0 で，増分を Δ で示すと，下式が得られる。

$$P_x \fallingdotseq EA\,(\,\varepsilon_{x0} + \Delta\varepsilon_x + 0.5\,\Delta\varepsilon_y^2\,) \tag{1a}$$

$$P_y = 0 \fallingdotseq P_x\,\Delta\varepsilon_y \tag{1b}$$

ここに ε_{x0} , $\Delta\varepsilon_x$, $\Delta\varepsilon_y$ はそれぞれ，d_{x0} , Δd_x , Δd_y を(初期)材長 L で除した値とする。式(1a),(1b)より，$\Delta\varepsilon_y$ に関して 3 次，$\Delta\varepsilon_x$ に関して 1 次の，以下の方程式が得られる。

$$\Delta\varepsilon_y\,(\,\varepsilon_{x0} + \Delta\varepsilon_x + 0.5\,\Delta\varepsilon_y^2\,) = 0 \tag{1c}$$

上式は，$\Delta\varepsilon_y$ が 0 の横変位しない解と，括弧内の $\Delta\varepsilon_y$ および $\Delta\varepsilon_x$ に関する 2 次および 1 次の式が 0 になる解があるが，これより以下の可能性が示唆される。

①横変位のない基本経路の解と，横変位のある分岐経路の解が独立的に存在している。このため，1 次の剛性だけを用いると，分岐経路を目指さずに，横変位のない安定($P_x>0$)または不安定($P_x<0$)な基本経路上の点を目指してしまう。

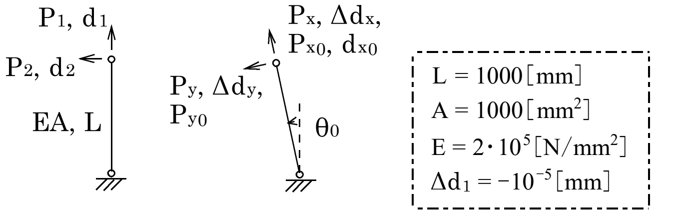
②このような基本経路へと向かう問題は，森迫らが詳述した，座屈荷重を超えた領域において整合剛性の下で不安定釣合経路をたどる問題[1]と部分的に似た状況にあると思われる。

③これらをもとに，剛性マトリクスの固有値が負となった場合には，1 次の剛性に従うと不安定な経路を目指してしまうと仮定する。この場合，1 次の釣合式による解は，力の釣合は満足するものの不安定であるから，その解を指向しても実際の挙動からは遠ざかることになる。

④このため本報では，不安定釣合経路に向かわないよう，剛性マトリクスの負の固有値を正値へと操作する事を考え，それによる挙動を調べてゆく。

Fig. 1 の倒立棒の数値解析結果を Fig. 2 に示す。なお解析用の条件は Fig. 1(c)によったが，d_1 の初期値を -10^{-5}mm として初期軸力をわずかに圧縮側とした。Fig. 2 において，◆付の青線および○付の赤線は d_2 の初期値がそれぞれ 0.04mm および 0.05mm の場合を示すが，いずれも固有値操作は行わずに，鉛直下方に変位制御した計 50 ステップ程度の解析の結果である。なお各ステップでの収束計算は行わず，次のステップで不釣合解消力を作用させている。同図を見ると，2 つの場合とも初期の数ステップの振動の後に，圧縮軸力下の不安定釣合経路をたどる場合($d_2 = 0.04$)と，軸力 0 の分岐経路をたどる場合($d_2 = 0.05$)に分かれた様子がわかる。

一方，d_2 にわずかな初期値(10^{-12})を与えて，固有値操作を行った場合の結果を，同図にマゼンタの実線で示す。但し，固有値操作といっても，本節の単純な検討モデルでは，変位制御すると剛性マトリクスがスカラーになるから，単純に剛性が負であれば-1 を乗じて正値化しただけである。図では 36 ステップ目で d_2 が 0.43 まで成長しているが，これは d_2 初期値の $2^{38.6}$ 倍であるから，36 のステップの間において不安定釣合経路からの距離が概ね 2 倍前後に拡大し続けた結果として，本来の



(a) model　(b) local coordinate　(c) in analytical cases

Fig. 1 Study model

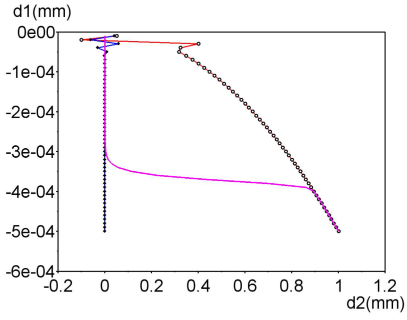


Fig. 2 Results of inverted bar

Manipulation of Eigenvalues of a Stiffness Matrix,　Part 1: Manipulation

HORI Akio, EJIMA Arisa

分岐経路へ至ったものと解釈できる。

本検討は非常に単純な例ではあるが，剛性マトリクスの負の固有値を正値に操作することで，不安定釣合経路から離してやり，分岐経路へと向かわせる事の可能性が示された。

３．対称な剛性マトリクスでの固有値操作　上記の解析結果を参考に，対称な剛性マトリクスでの固有値操作として，下式を提案する。なおベクトルを斜体，マトリクスを立体で表記する。

$$ {}_{m}\mathbf{K} = \mathbf{K} - \sum_{i} m_i \lambda_i \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i^{T} \tag{2} $$

ここに，${}_{m}\mathbf{K}$ は操作後の剛性マトリクス，$\mathbf{K}$ は操作前の(通常の)剛性マトリクス，λ_i および $\boldsymbol{u}_i$ は $\mathbf{K}$ の i 番目の固有値および固有ベクトル(ノルムは 1 に基準化)，$\sum_i$ は負の固有値と対応する部分の総和，m_i は後述する固有値操作の定数，とする。上式による ${}_{m}\mathbf{K}$ は以下の特性を持つ。

①対称な $\mathbf{K}$ に対して，線形代数の定理より固有ベクトルの直交性が成立するから，式(2)の両辺に後から j 次の固有ベクトル $\boldsymbol{u}_j$ を乗じれば，

$$ {}_{m}\mathbf{K}\,\boldsymbol{u}_j = \mathbf{K}\,\boldsymbol{u}_j \quad , \quad \text{但し } i \neq j \text{ の場合} \tag{3a} $$

となる。つまり，固有値操作をしない他の固有ベクトルに関わる変位増分については，$\mathbf{K}$ を ${}_{m}\mathbf{K}$ に代えても影響が起きない。

②負固有値を持つ i 番目の固有ベクトルに関わる変位増分に対しては，剛性マトリクスの固有値が$(1-m_i)$倍される。これは，式(2)の両辺に後から $\boldsymbol{u}_i$ を乗じて考えると(但し負固有値が 1 つだけの場合を略記するが)，

$$ {}_{m}\mathbf{K}\,\boldsymbol{u}_i = \mathbf{K}\,\boldsymbol{u}_i - m_i \lambda_i \boldsymbol{u}_i = (1-m_i)\,\lambda_i \boldsymbol{u}_i \tag{3b} $$

となるから，容易に確かめることができる。この定数 m_i の値については，相当に複雑な剛性選択を含む場合の結果も勘案して定めるべきであるが，本報の範囲では特に言及のない限り m_i を仮値の 2.0 として検討を進める。この場合，$\mathbf{K}$ の負固有値を−1.0 倍したものが，${}_{m}\mathbf{K}$ の正固有値へと操作される。

③上記①②より当然ではあるが，${}_{m}\mathbf{K}$ の固有ベクトルは $\mathbf{K}$ のそれと変わらない。また対称な $\mathbf{K}$ に対して，${}_{m}\mathbf{K}$ も対称となる。

④負の固有値が多数ある場合でも，固有値操作には特段の支障が起きないと考えられる。この点は，弾性分岐問題において 0 固有値が複数ある場合に工夫する方法や，弾塑性分岐問題において負固有値の固有ベクトルの正負両方向に試行する方法[1)]，にはない特長となる可能性が考えられる。但し多重固有値に対しては m_i の値を同一にすべきと想像される。

なお当該ステップの前後における剛性変化が小さい場合には，式(2)を用いて負固有値を$(1-m_i)$倍する事による当該固有ベクトル方向の不釣合力の拡大縮小率 m_i^* は，ステップ内での収束計算を特にしなければ，

$$ m_i^* = 1.0 - 1.0/(1-m_i) = m_i/(m_i-1) \;, \quad \text{if linear} \tag{4a} $$

となるはずである(Fig. 3(a))。これより m_i が 2.0 の場合には m_i^* も 2.0 になるが，もしも不釣合力をより積極的に拡大したい場合には上式から m_i を設定する事もできよう。一方，もし剛性変化が大きく，荷重—変位関係が Fig. 3(b)のような放物線の場合には，

$$ m_i^* = \{1.0 - 0.5/(1-m_i)\}^2 = (m_i-0.5)^2/(m_i-1)^2 \;, \quad \text{if quadratic} \tag{4b} $$

となるものの，m_i が 2.0 の場合の m_i^* は 2.25 にしかならず，Fig. 3(a)の場合の 2.0 との相違は大きなものではない。このため，m_i の仮値 2.0 は，滑らかな剛性変化には影響されにくい範囲にあるように思われる。

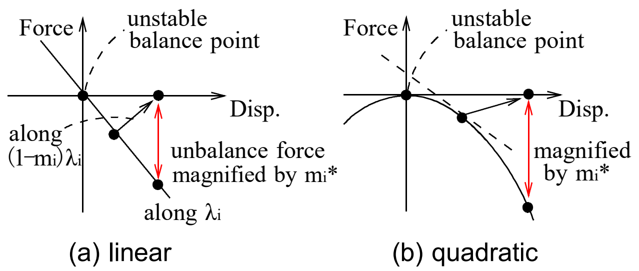
４．非対称な剛性マトリクスでの固有値操作　詳細は省略するが，非対称な場合も含む剛性マトリクスの固有値操作として，下式を提案しておく。

$$ {}_{m}\mathbf{K}_{as} = \mathbf{K} - \mathbf{U}_{ji}\,\mathbf{m}_i\,\boldsymbol{\lambda}_i\,\mathbf{U}_{ji}^{-1} \tag{5} $$

ここに，${}_{m}\mathbf{K}_{as}$ は操作後の(対称または非対称な)剛性マトリクス，$\mathbf{K}$ は操作前の(対称または非対称な)剛性マトリクス，$\boldsymbol{\lambda}_i$ は $\mathbf{K}$ の固有値を並べた対角マトリクス，$\mathbf{m}_i$ は m_i を並べた対角マトリクス，$\mathbf{U}_{ji}$ は $\mathbf{K}$ の固有マトリクス(ノルムを 1 に基準化した i 番目の固有ベクトル $\boldsymbol{u}_i$ を i 列に配した行列)，とする。なお添字 i は i 番目の固有値･固有ベクトルに対応する事を示す。

５．まとめ　その 1 では固有値操作を提案した。対称マトリクスでは式(2)，非対称マトリクスでは式(5)で与えられる。具体的な解析結果をその 2 で述べる。

参考文献　1) 上谷･中村･森迫･石田：弾塑性構造物の臨界挙動解析のための整合剛性行列形成法，AIJ 構論報，1993.3



(a) linear　　(b) quadratic

Fig. 3 Magnification of unbalance force

* 小山工業高等専門学校　教授･博(工)
**小山工業高等専門学校　専攻科生
* Prof., Oyama College, National Inst. of Tech. Dr. Eng.
** Grad. Student, Oyama College, National Inst. of Tech.